2-1 直線方程式

直線的斜角與斜率

例題 1

(1) 水上樂園的直線滑水道是阿倫的最愛。已知滑水道通過 $(2,3)$ 及 $(4,7)$ 兩點，試求直線滑水道的斜率。

(2) 已知過 $P(3,4)$ 與 $Q(5,a)$ 兩點的直線斜率為 $\frac{1}{2}$，試求 a 值。

例題 1

(1) 水上樂園的直線滑水道是阿倫的最愛。已知滑水道通過 $(2,3)$ 及 $(4,7)$ 兩點，試求直線滑水道的斜率。

(2) 已知過 $P(3,4)$ 與 $Q(5,a)$ 兩點的直線斜率為 $\frac{1}{2}$，試求 a 值。

解

(1) 依斜率定義，得 $m=\frac{7-3}{4-2}=\frac{4}{2}=2$

斜率 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(x_1\neq x_2)$

(2) 直線 PQ 的斜率為 $\frac{a-4}{5-3}=\frac{1}{2}$

即 $\frac{a-4}{2}=\frac{1}{2}$，得 $a-4=1$，故 $a=5$

類題 1

(1) 設直線 L 過 $A(2,-1)$ 與 $B(5,-3)$ 兩點，試求直線 L 之斜率。

(2) 已知過 $P(0,8)$ 與 $Q(a+1,2)$ 兩點之直線斜率為 -3，試求 a 值。

類題 1

(1) 設直線 L 過 $A(2,-1)$ 與 $B(5,-3)$ 兩點，試求直線 L 之斜率。

(2) 已知過 $P(0,8)$ 與 $Q(a+1,2)$ 兩點之直線斜率為 -3，試求 a 值。

解

(1) 直線 L 之斜率為 $\dfrac{-3-(-1)}{5-2}=-\dfrac{2}{3}$

(2) 直線 PQ 之斜率為 $\dfrac{2-8}{(a+1)-0}=-3$

$$\Rightarrow \quad \frac{-6}{a+1}=-3 \quad \Rightarrow \quad a+1=2 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

例題 2

試求下列直線的斜率：

(1) 斜角為 60°　　(2) 斜角為 135°

例題 2

試求下列直線的斜率：

(1) 斜角為 60°　　(2) 斜角為 135°

解 (1) 斜率為 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

斜率 $m = \tan\theta$

(2) 斜率為 $\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

類題 2

公園一處溜滑梯與地面夾角為 30°，試求此溜滑梯的斜率。

類題 2

公園一處溜滑梯與地面夾角為 30°，試求此溜滑梯的斜率。

解 斜率為 $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

例題 3

已知 $A(1,0)$、$B(-2,3)$、$C(3a,a)$、$D(5,-7)$ 為坐標平面上四點，

(1) 若直線 AB // 直線 CD，試求 a 值。

(2) 若直線 $AB \perp$ 直線 CD，試求 a 值。

例題 3

已知 $A(1,0)$、$B(-2,3)$、$C(3a,a)$、$D(5,-7)$為坐標平面上四點，

(1)若直線 AB // 直線 CD，試求 a 值。

(2)若直線 $AB \perp$ 直線 CD，試求 a 值。

解 直線 AB 斜率為 $\dfrac{3-0}{-2-1}=-1$，直線 CD 斜率為 $\dfrac{-7-a}{5-3a}$

(1) 因為直線 AB // 直線 CD

得 $-1=\dfrac{-7-a}{5-3a}$

若 L_1 // L_2，則 $m_1=m_2$

整理得 $-(5-3a)=-7-a$

即 $4a=-2$，故 $a=-\dfrac{1}{2}$

例題 3

已知 $A(1,0)$、$B(-2,3)$、$C(3a,a)$、$D(5,-7)$ 為坐標平面上四點，

(1) 若直線 AB // 直線 CD，試求 a 值。

(2) 若直線 $AB \perp$ 直線 CD，試求 a 值。

解 (2) 因為直線 $AB \perp$ 直線 CD

得 $(-1)\times\dfrac{-7-a}{5-3a}=-1$

若 $L_1 \perp L_2$，則 $m_1 \times m_2 = -1$

即 $\dfrac{-7-a}{5-3a}=1$

整理得 $-7-a=5-3a$

所以 $2a=12$，故 $a=6$

類題 3

已知 $A(3,3)$、$B(4,5)$、$C(-1,6)$、$D(2k,3k)$ 為坐標平面上四點，試求下列狀況之 k 值：

(1) 直線 AB // 直線 CD　　(2) 直線 $AB \perp$ 直線 CD

類題 3

已知 $A(3,3)$、$B(4,5)$、$C(-1,6)$、$D(2k,3k)$ 為坐標平面上四點，試求下列狀況之 k 值：

(1) 直線 AB // 直線 CD　　　　(2) 直線 $AB \perp$ 直線 CD

解　直線 AB 斜率為 $\dfrac{5-3}{4-3}=2$，直線 CD 斜率為 $\dfrac{3k-6}{2k-(-1)}=\dfrac{3k-6}{2k+1}$

(1)　直線 AB//直線 CD

$$\Rightarrow \quad 2=\frac{3k-6}{2k+1} \quad \Rightarrow \quad 3k-6=2(2k+1) \quad \Rightarrow \quad k=-8$$

(2)　直線 $AB\perp$直線 CD

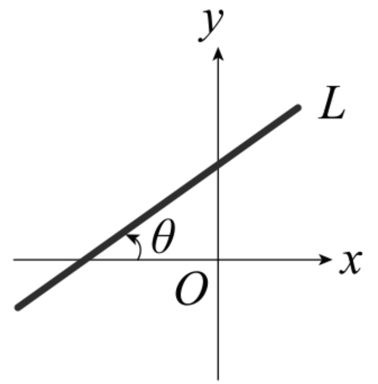
$$\Rightarrow \quad 2\times\frac{3k-6}{2k+1}=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3k-6}{2k+1}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(3k-6)=-(2k+1)$$

$$\Rightarrow \quad 8k=11 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{11}{8}$$

重點整理

重點 1：直線的斜角與斜率

1. 斜角



直線 L 和 x 軸正向所夾的逆時針方向的夾角，稱為直線的**斜角**。

設斜角為 θ，則 $0° \le \theta < 180°$。

2. **斜率**

設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 為直線 L 上相異兩點，且直線 L 的斜角為 θ，則直線 L 的斜率有以下兩種計算方法。

(1) 利用兩點間的坐標變化：

①若 $x_1 \ne x_2$，則直線 L 的斜率為 $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\text{鉛直變化量}}{\text{水平變化量}}$。

②若 $x_1 = x_2$，則直線 L 垂直 x 軸 $\Rightarrow$ 直線 L 斜率不存在。

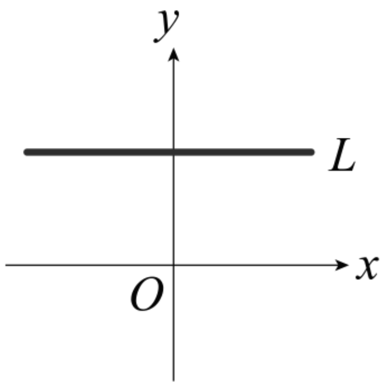
（接下頁）

重點整理

(2) 利用斜角：

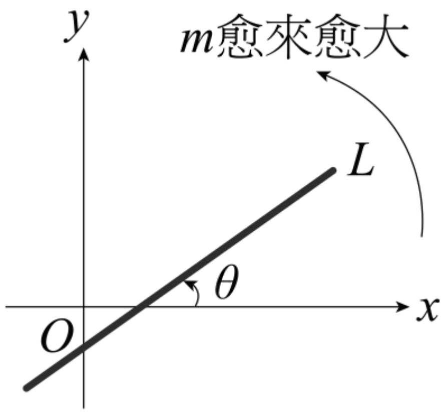
已知直線 L 的斜角為 θ，則斜率為斜角的正切值，即斜率 $m=\tan\theta$。

①



$\theta=0^\circ \quad \Rightarrow \quad m=0$

②



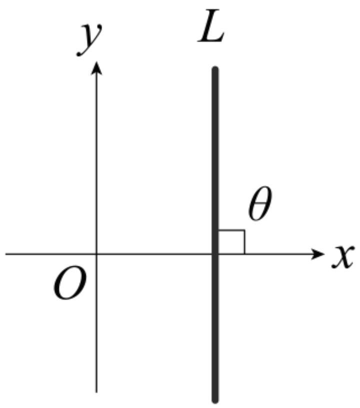
$0^\circ<\theta<90^\circ \quad \Rightarrow \quad m>0$

$\because$ $\tan\theta$ 遞增 $\therefore$ θ 愈大，m 愈大

（接下頁）

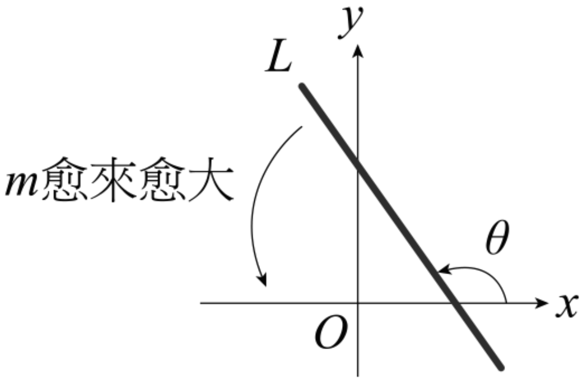
重點整理

③



$\theta = 90° \quad \Rightarrow \quad m$ 不存在

④



$90° < \theta < 180° \quad \Rightarrow \quad m < 0$

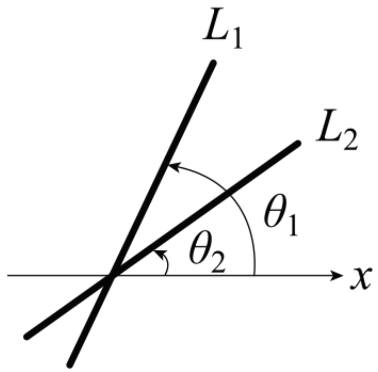
$\because \quad \tan\theta$ 遞增 $\quad \therefore \quad \theta$ 愈大，m 愈大

（接下頁）

重點整理

3. 斜率 m 、斜角 θ 和直線 L 的傾斜程度

(1) $m>0$



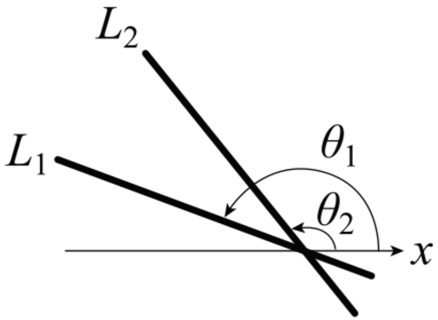
$\theta_1>\theta_2 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta_1>\tan\theta_2$

$\quad\Rightarrow\quad m_1>m_2$

即斜角愈大，斜率 m 愈大，

直線愈斜

(2) $m<0$



$\theta_1>\theta_2 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta_1>\tan\theta_2$

$\quad\Rightarrow\quad m_1>m_2 \quad\Rightarrow\quad |m_1|<|m_2|$

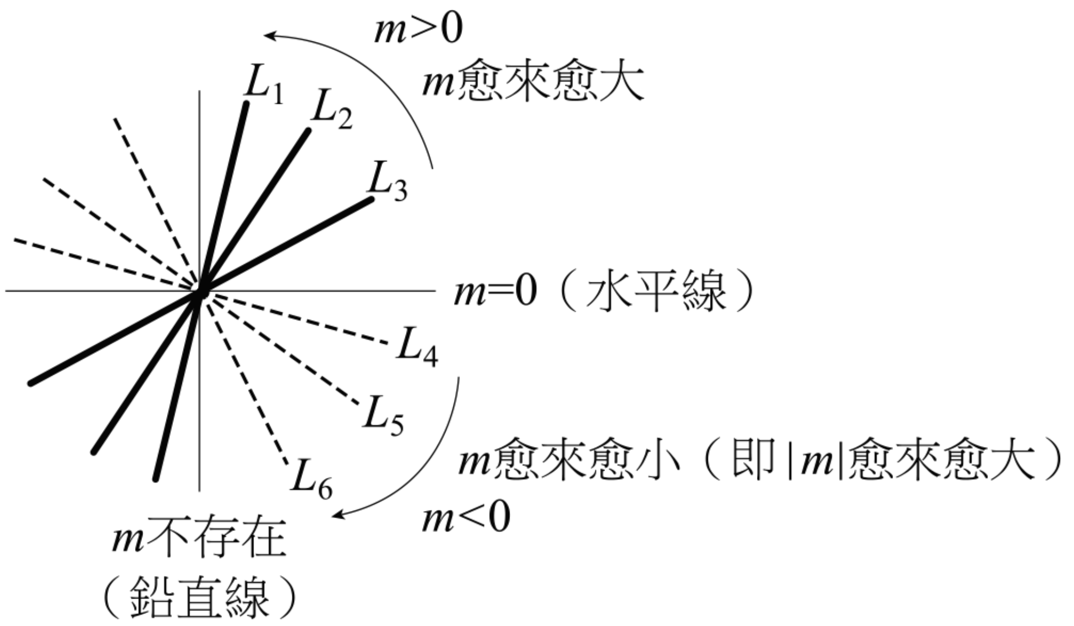
即斜角愈小，斜率 $|m|$ 愈大，

直線愈斜

（接下頁）

重點整理

由以上討論可知：



故 $m_{L_1}>m_{L_2}>m_{L_3}>0>m_{L_4}>m_{L_5}>m_{L_6}$

數學超連結

1. 斜率 >0
   (1)直線由左下到右上。
   (2)斜角愈大，斜率愈大。
2. 斜率 <0
   (1)直線由左上到右下。
   (2)斜角愈大，斜率愈大。

（接下頁）

重點整理

4. 直線平行與垂直的關係

(1) 直線的平行與垂直：設兩直線 L_1 、 L_2 的斜率分別為 m_1 、 m_2 ，則

① $L_1 // L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$（鉛直線除外，兩鉛直線必互相平行，但斜率不存在）

② $L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \times m_2 = -1$（鉛直線和水平線除外）

(2) 三點共線：設 A 、 B 、 C 三點在同一直線上 $\quad \Leftrightarrow \quad m_{\overleftrightarrow{AB}} = m_{\overleftrightarrow{BC}}$

例題 4

試求滿足下列條件的直線方程式：

(1) 過點 $(4,3)$ 且斜率為 2

(2) 過 $(1,3)$ 與 $(4,0)$ 兩點

(3) 過 $(2,0)$ 與 $(2,11)$ 兩點

例題 4

試求滿足下列條件的直線方程式：

(1) 過點 $(4,3)$ 且斜率為 2　　(2) 過 $(1,3)$ 與 $(4,0)$ 兩點

(3) 過 $(2,0)$ 與 $(2,11)$ 兩點

解 (1) 由點斜式公式得直線方程式為 $y-3=2(x-4)$　　$y-y_0=m(x-x_0)$

整理得 $2x-y-5=0$

(2) 因所求直線通過 $(1,3)$ 與 $(4,0)$ 兩點

得其斜率為 $\dfrac{0-3}{4-1}=\dfrac{-3}{3}=-1$

再利用點斜式公式得直線方程式為

$y-0=(-1)(x-4)$　　直線過點 $(4,0)$ 且斜率為 -1

整理得 $x+y-4=0$

例題 4

試求滿足下列條件的直線方程式：

(1) 過點 $(4,3)$ 且斜率為 2　　(2) 過 $(1,3)$ 與 $(4,0)$ 兩點

(3) 過 $(2,0)$ 與 $(2,11)$ 兩點

解 (3) 所求直線通過 $(2,0)$ 與 $(2,11)$ 兩點

其斜率 $\dfrac{11-0}{2-2}=\dfrac{11}{0}$ 不存在

表示直線垂直 x 軸，其方程式為 $x=2$

類題 4

試求滿足下列條件的直線方程式：

(1) 過點$(-3,2)$且斜率為$\frac{1}{2}$

(2) 過$(5,4)$與$(3,8)$兩點

(3) 過$(0,3)$與$(-4,3)$兩點

類題 4

試求滿足下列條件的直線方程式：

(1) 過點 $(-3,2)$ 且斜率為 $\frac{1}{2}$　　(2) 過 $(5,4)$ 與 $(3,8)$ 兩點

(3) 過 $(0,3)$ 與 $(-4,3)$ 兩點

解 (1) 由點斜式得直線方程式為 $y-2=\frac{1}{2}[x-(-3)]$

整理得 $x-2y+7=0$

(2) 因所求直線通過(5,4)與(3,8)兩點

得其斜率為 $\frac{8-4}{3-5}=\frac{4}{-2}=-2$

再利用點斜式的直線方程式為 $y-4=(-2)(x-5)$

整理得 $2x+y-14=0$

類題 4

試求滿足下列條件的直線方程式：

(1) 過點 $(-3,2)$ 且斜率為 $\frac{1}{2}$　　(2) 過 $(5,4)$ 與 $(3,8)$ 兩點

(3) 過 $(0,3)$ 與 $(-4,3)$ 兩點

解 (3)　所求直線通過 $(0,3)$ 與 $(-4,3)$ 兩點

其斜率 $\frac{3-3}{-4-0}=0$

表示直線平行 x 軸，其方程式為 $y=3$

例題 5

(1) 若直線 L 之斜率為 3 且 y 截距為 4，試求直線 L 的方程式。

(2) 若直線 L 之 x 截距為 3，y 截距為 -2，試求直線 L 的方程式。

例題 5

(1) 若直線 L 之斜率為 3 且 y 截距為 4，試求直線 L 的方程式。

(2) 若直線 L 之 x 截距為 3，y 截距為 -2，試求直線 L 的方程式。

解 (1) 由斜截式得直線方程式為 $y=3x+4$ $\boxed{y=mx+b}$

整理得 $3x-y+4=0$

(2) 由截距式得直線方程式為 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$ $\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$

整理得 $2x-3y-6=0$

類題 5

(1) 若直線 L 之斜率為 2 且 y 截距為 -5，試求直線 L 的方程式。

(2) 若直線 L 之 x 截距為 -1，y 截距為 6，試求直線 L 的方程式。

類題 5

(1) 若直線 L 之斜率為 2 且 y 截距為 -5，試求直線 L 的方程式。

(2) 若直線 L 之 x 截距為 -1，y 截距為 6，試求直線 L 的方程式。

解 (1) 由斜截式得直線方程式為 $y=2x+(-5)$

整理得 $2x-y-5=0$

(2) 由截距式得直線方程式為 $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{6}=1$

整理得 $6x-y+6=0$

例題 6

試求直線 L：$x-2y+6=0$ 與兩坐標軸所圍成的三角形面積。

例題 6

試求直線 L：$x-2y+6=0$ 與兩坐標軸所圍成的三角形面積。

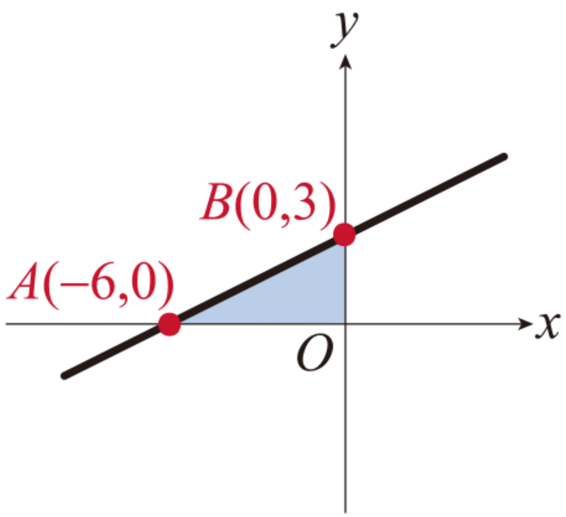
解 $y=0$ 代入 $x-2y+6=0$，得 $x+6=0$，則 $x=-6$

即直線 L 與 x 軸交於 $(-6,0)$ ← x 截距為 -6

$x=0$ 代入 $x-2y+6=0$，得 $-2y+6=0$，則 $y=3$

即直線 L 與 y 軸交於 $(0,3)$ ← y 截距為 3

如圖所示



直線 L 與兩坐標軸圍成直角 $\triangle OAB$

面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\times|-6|\times|3|$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3=9$

類題 6

試求直線 $L：\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$ 與兩坐標軸所圍成的三角形面積。

類題 6

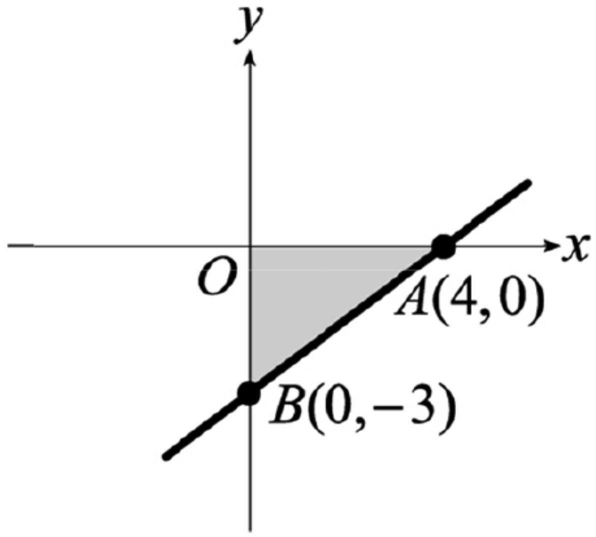
試求直線 L：$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1$ 與兩坐標軸所圍成的三角形面積。

解

$y=0$ 代入 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1$，得 $x=4$，即直線 L 與 x 軸交於$(4,0)$

$x=0$ 代入 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1$，得 $y=-3$，即直線 L 與 y 軸交於$(0,-3)$

如圖所示



直線 L 與兩坐標軸圍成直角$\triangle OAB$

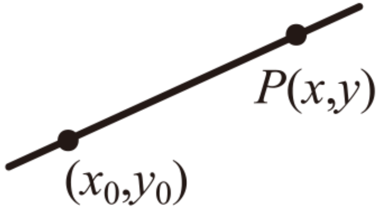
面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\times|4|\times|-3|=6$

重點整理

重點 2：直線方程式的求法

1. **點斜式**

過點 (x_0, y_0) 且斜率為 m 的直線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 。



說明：設直線上任一點 $P(x, y)$

則直線的斜率 $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0)$

註：若已知直線 L 上相異兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$

(1) $x_1 \neq x_2$ ：直線 L 的斜率 $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ，再代入點斜式即可求出直線 L 的方程式。

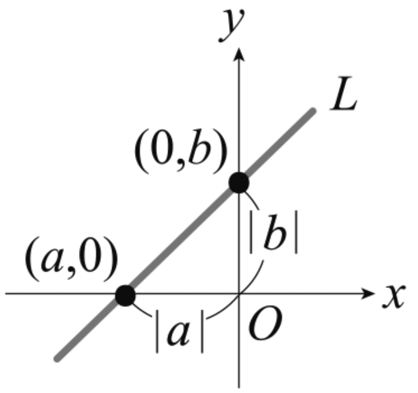
(2) $x_1 = x_2$ ：直線 L 的斜率不存在（表垂直 x 軸） $\Rightarrow$ 直線 L 的方程式為 $x = x_1$ 。

（接下頁）

重點整理

2. 斜截式

(1) 截距：



①截距的定義

若直線 L 和 x 軸的交點為 $(a,0)$，則稱 a 為 L 的 **x 截距**。

若直線 L 和 y 軸的交點為 $(0,b)$，則稱 b 為 L 的 **y 截距**。

註：截距不是距離，所以可正可負，若直線過原點，則 x 截距 $=y$ 截距 $=0$。

②截距的求法

求 x 截距：令 $y=0$，解 x。

求 y 截距：令 $x=0$，解 y。

③直線 L 的 x 截距和 y 截距分別為 a、b，則 L 和兩坐標軸所圍三角形面積為 $\dfrac{1}{2}|ab|$。

（接下頁）

重點整理

(2) **斜截式：**

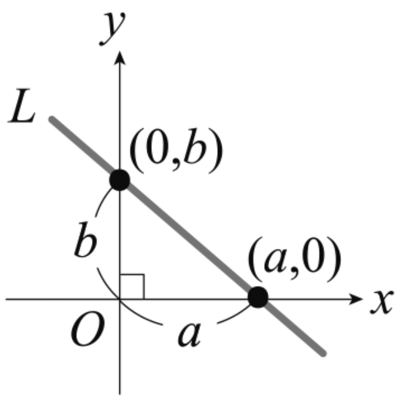
斜率為 m，y 截距為 b 的直線方程式為 $y=mx+b$。

說明： y 截距為 b $\Rightarrow$ 直線過點 $(0,b)$，由點斜式

$\Rightarrow$ $y-b=m(x-0)$ $\Rightarrow$ $y=mx+b$

3. **截距式**

x 截距為 a，y 截距為 b，且 $ab\neq 0$ 的直線方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。



說明： x 截距為 a $\Rightarrow$ 直線過點 $(a,0)$

y 截距為 b $\Rightarrow$ 直線過點 $(0,b)$

由點斜式 $\Rightarrow$ $y-0=\dfrac{0-b}{a-0}(x-a)$

$\Rightarrow$ $bx+ay=ab$（同除以 ab） $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

例題 7

已知直線 L：$2x+3y-6=0$，試求符合下列情況之直線方程式：

(1) 過點 $(-1,4)$ 且與 L 平行

(2) 過點 $(-1,4)$ 且與 L 垂直

例題 7

已知直線 L：$2x+3y-6=0$，試求符合下列情況之直線方程式：

(1) 過點 $(-1,4)$ 且與 L 平行

(2) 過點 $(-1,4)$ 且與 L 垂直

解 直線 L：$2x+3y-6=0$ 之斜率為 $-\frac{2}{3}$

$ax+by+c=0$ 之斜率為 $-\frac{a}{b}$

(1) 設 $L_1 \parallel L$，則 L_1 之斜率為 $-\frac{2}{3}$

由點斜式得直線方程式為 $y-4=\left(-\frac{2}{3}\right)[x-(-1)]$

整理得 $2x+3y-10=0$

例題 7

已知直線 L：$2x+3y-6=0$，試求符合下列情況之直線方程式：

(1) 過點 $(-1,4)$ 且與 L 平行

(2) 過點 $(-1,4)$ 且與 L 垂直

解 (2) 設 $L_2 \perp L$，則 L_2 之斜率為 $\dfrac{3}{2}$

兩線垂直，其斜率相乘等於 -1

由點斜式得直線方程式為 $y-4=\dfrac{3}{2}[x-(-1)]$

整理得 $3x-2y+11=0$

類題 7

已知直線 L：$3x+4y+15=0$，試求：

(1) 過點 $(3,1)$ 且與 L 平行的直線方程式

(2) 過點 $(3,1)$ 且與 L 垂直的直線方程式

類題 7

已知直線 L：$3x+4y+15=0$，試求：

(1) 過點 $(3,1)$ 且與 L 平行的直線方程式

(2) 過點 $(3,1)$ 且與 L 垂直的直線方程式

解 直線 L：$3x+4y+15=0$ 之斜率為 $-\dfrac{3}{4}$

(1) 設 $L_1 // L$，則 L_1 之斜率為 $-\dfrac{3}{4}$

由點斜式得直線方程式為 $y-1=-\dfrac{3}{4}(x-3)$

整理得 $3x+4y-13=0$

(2) 設 $L_2 \perp L$，則 L_2 之斜率為 $\dfrac{4}{3}$

由點斜式得直線方程式為 $y-1=\dfrac{4}{3}(x-3)$

整理得 $4x-3y-9=0$

例題 8

試求過兩直線 $2x+y-8=0$ 與 $x-2y+1=0$ 之交點，且與直線 L：$x+3y+5=0$ 垂直的直線方程式。

例題 8

試求過兩直線 $2x+y-8=0$ 與 $x-2y+1=0$ 之交點，且與直線 $L：x+3y+5=0$ 垂直的直線方程式。

解 解聯立方程式 $\begin{cases} 2x+y-8=0 \cdots\cdots ① \\ x-2y+1=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 找出交點

利用加減消去法，將 ①$\times 2+$②，得 $5x-15=0$，解出 $x=3$

再將 $x=3$ 代回 ① 式，得 $y=2$

則兩直線相交於點 $(3,2)$

又垂直 $L：x+3y+5=0$ 的直線方程式可假設為 $3x-y+k=0$

且點 $(3,2)$ 在 $3x-y+k=0$ 上

代入得 $3\times 3-2+k=0$，即 $k=-7$

故所求直線方程式為 $3x-y-7=0$

類題 8

試求過兩直線 $3x - 4y - 7 = 0$ 與 $x + 3y + 2 = 0$ 之交點，且與直線 $L：7x - 3y + 4 = 0$ 平行的直線方程式。

類題 8

試求過兩直線 $3x-4y-7=0$ 與 $x+3y+2=0$ 之交點，且與直線 $L：7x-3y+4=0$ 平行的直線方程式。

解 解聯立方程式 $\begin{cases} 3x-4y-7=0 \cdots\cdots ① \\ x+3y+2=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 找出交點

由①－②×3 得 $-13y-13=0 \Rightarrow y=-1$

再將 $y=-1$ 代回②式，得 $x=1$

則兩直線相交於點$(1,-1)$

又平行 $L：7x-3y+4=0$ 的直線方程式可假設為 $7x-3y+k=0$

且點$(1,-1)$在 $7x-3y+k=0$ 上

代入得 $7\times 1-3\times(-1)+k=0 \Rightarrow k=-10$

故所求直線方程式為 $7x-3y-10=0$

重點整理

重點 3：二元一次方程式的圖形

1. 二元一次方程式 $ax+by+c=0$，$a^2+b^2\neq 0$（即 a、b 不同時為 0），其圖形為一直線：

(1) $a\neq 0$，$b=0$ $\Rightarrow$ $ax+c=0$ $\Rightarrow$ $x=-\dfrac{c}{a}$ 表過點 $\left(-\dfrac{c}{a},0\right)$ 垂直於 x 軸的鉛直直線。

(2) $a=0$，$b\neq 0$ $\Rightarrow$ $by+c=0$ $\Rightarrow$ $y=-\dfrac{c}{b}$ 表過點 $\left(0,-\dfrac{c}{b}\right)$ 垂直於 y 軸的水平直線。

(3) $a\neq 0$，$b\neq 0$ $\Rightarrow$ $ax+by+c=0$ $\Rightarrow$ $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$（斜截式）

表斜率 $-\dfrac{a}{b}$ 且 y 截距為 $-\dfrac{c}{b}$ 的直線。

（接下頁）

重點整理

2. 直線互相平行或垂直時方程式的關係

設 $L: ax+by+c=0$，則

(1) 和 L 平行的直線設為：$ax+by+k=0$（$k \neq c$）（斜率相等）

(2) 和 L 垂直的直線設為：$bx-ay+k=0$（斜率相乘等於 -1）

數學超連結

求直線斜率的方法：

1. 過相異兩點 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) $\Rightarrow$ $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$（$x_1 \neq x_2$）

2. 斜角 θ $\Rightarrow$ $m=\tan\theta$

3. 直線 $ax+by+c=0$ $\Rightarrow$ $m=-\dfrac{a}{b}$

（接下頁）

重點整理

※3. 二元一次方程組之解的幾何意義

二元一次方程式的圖形為一直線，故二元一次方程組 $\begin{cases} L_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \\ L_2: a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ 之解即為直線 L_1、L_2 的交點，有下列三種情形：

條件	$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$
解的個數	恰有一解	無解	無限多組解
幾何意義	兩直線交於一點	兩直線平行	兩直線重合
名稱	相容方程組	矛盾方程組	相依方程組

例題 9

天文學家在研究星體運動時，發現電腦螢幕上有一隕石沿著直線 $3x+4y-5=0$ 飛行。假設 α 星球位於坐標 $(2,1)$ 處，試求螢幕上隕石與 α 星球最近的距離。

例題 9

天文學家在研究星體運動時，發現電腦螢幕上有一隕石沿著直線 $3x+4y-5=0$ 飛行。假設 α 星球位於坐標 $(2,1)$ 處，試求螢幕上隕石與 α 星球最近的距離。

解 由點到直線距離公式，得

$$\frac{|3\times2+4\times1-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$$

$$\boxed{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

類題 9

假設臺灣最北端的富貴角燈塔坐標在$(3,6)$，今有一漁船沿著直線 $4x+3y=60$ 的路徑航行，試求燈塔與漁船最近的距離。

類題 9

假設臺灣最北端的富貴角燈塔坐標在$(3,6)$，今有一漁船沿著直線 $4x+3y=60$ 的路徑航行，試求燈塔與漁船最近的距離。

解 先將 $4x+3y=60$ 化為 $4x+3y-60=0$

由點到直線距離公式，得 $\dfrac{|4\times3+3\times6-60|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{30}{5}=6$

例題 10

飛行特技是一種需要高度飛行技巧的表演。假設兩架雷鳥 F–16 戰機分別沿著直線 $4x+3y+5=0$ 與 $4x+3y-15=0$ 平行飛行，試求兩架戰機相距的距離。

例題 10

飛行特技是一種需要高度飛行技巧的表演。假設兩架雷鳥 F−16 戰機分別沿著直線 $4x+3y+5=0$ 與 $4x+3y-15=0$ 平行飛行，試求兩架戰機相距的距離。

解 由兩平行線距離公式，得

$$\frac{|5-(-15)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$$

$$\boxed{\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

類題 10

試求兩平行線 $5x-12y+7=0$ 與 $5x-12y-19=0$ 之距離。

類題 10

試求兩平行線 $5x-12y+7=0$ 與 $5x-12y-19=0$ 之距離。

解 由兩平行線距離公式，得 $\dfrac{|7-(-19)|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{26}{13}=2$

例題 1

1

試求與直線 $3x+4y+1=0$ 平行且距離為 2 的直線方程式。

例題 1

試求與直線 $3x+4y+1=0$ 平行且距離為 2 的直線方程式。

1 解

因為所求直線與 $3x+4y+1=0$ 平行

故設所求直線為 $3x+4y+k=0$

又 $3x+4y+1=0$ 與 $3x+4y+k=0$ 的距離為 2

則 $\dfrac{|1-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|1-k|}{5}=2$

得 $|1-k|=10$，亦即 $1-k=\pm 10$

整理得 $k=11$ 或 -9

故所求直線方程式為 $3x+4y+11=0$ 或 $3x+4y-9=0$

類題 1

1

試求與直線 $x-y+8=0$ 平行且距離為 $\sqrt{2}$ 的直線方程式。

類題 1

試求與直線 $x-y+8=0$ 平行且距離為 $\sqrt{2}$ 的直線方程式。

1 解

因為所求直線與 $x-y+8=0$ 平行

故設所求直線為 $x-y+k=0$

又 $x-y+8=0$ 與 $x-y+k=0$ 的距離為 $\sqrt{2}$

則 $\dfrac{|8-k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|8-k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |8-k|=2$

$\Rightarrow \quad 8-k=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad k=6$ 或 10

故所求直線方程式為 $x-y+6=0$ 或 $x-y+10=0$

重點整理

重點 4：點到直線的距離

1. 點到直線的距離

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 L ：$ax+by+c=0$ 的距離為 $d(P,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

2. 兩平行線距離

設 L_1 ：$ax+by+c_1=0$ 和 L_2 ：$ax+by+c_2=0$ 為兩平行線，則此兩平行線間的距離為

$$d(L_1, L_2)=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

註：L_1 、L_2 一定要 x 、y 和常數項排列方式一樣且 x 、y 係數相同。

Print Slide Master

- Our PowerPoint templates and backgrounds are «pre-made» presentation shells («pre-made» slides). All design backgrounds, graphics, typefaces, and colors have been created and are pre-set by an expert graphic designers which are working with some of the most prominent businesses in the world.

- You simply insert your text. That's it! You just can't go wrong with these templates and backgrounds!

- Download this template as well as our others at http://poweredtemplate.com/abstract-textures-ppt-powerpoint-templates.html